



TITLE:

微分代数方程式の数値解法(数値解析とそのアルゴリズム)

AUTHOR(S):

大迫, 尚行; 中島, 正治

CITATION:

大迫, 尚行 ...[et al]. 微分代数方程式の数値解法(数値解析とそのアルゴリズム). 数理解析研究所講究録 1992, 791: 63-73

ISSUE DATE:

1992-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82692>

RIGHT:

微分代数方程式の数値解法

鹿大理 大迫尚行 (Naoyuki Ohsako)

鹿大理 中島正治 (Masaharu Nakashima)

定係数微分代数方程式

$$Ax(t) + Bx(t) = q(t) \quad (1)$$

$$A \in L(\mathbb{R}^m) \text{ singular}, B \in L(\mathbb{R}^m)$$

についての数値解法について、まず理論的なことを述べる

定義 $A \in L(\mathbb{R}^m)$ に対する index を次で定義する

$$\text{ind}(A) := \min \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \ker(A^k) = \ker(A^{k+1})\}$$

但し $A^0 = I$ とする

$$\text{定理 1} \quad \text{im}(A^k) \oplus \ker(A^k) = \mathbb{R}^m$$

$$\text{iff } k \geq \text{ind}(A)$$

$$\text{定理 2} \quad A \in L(\mathbb{R}^m) : \text{ind}(A) = k, \text{rank}(A^k) = r$$

$$s_1, \dots, s_r, \dots, s_m : \text{一次独立}, S := [s_1, \dots, s_r, s_{r+1}, \dots, s_m]$$

$$\text{im}(A^k) = \text{span}(s_1, \dots, s_r)$$

$$\ker(A^k) = \text{span}(s_{r+1}, \dots, s_m) \quad \text{とすると}$$

$$A = S \operatorname{diag}(M, N) S^{-1}, \text{ where}$$

$$M \in L(\mathbb{R}^r) : \text{non singular}$$

$$N \in L(\mathbb{R}^{m-r}) : \text{nilpotent with order } k$$

と書ける

補題3 $Q \in L(\mathbb{R}^m) : \text{non singular}, A \in L(\mathbb{R}^m)$

のとき $\operatorname{ind}(Q^{-1}AQ) = \operatorname{ind}(A)$, さらに

$QA = AQ$ のとき

$\operatorname{ind}(AQ) = \operatorname{ind}(QA) = \operatorname{ind}(A)$ が成り立つ

定義 $A, B \in L(\mathbb{R}^m)$ に対する行列束 (A, B) が

regular (若しくは non singular) であるとは

$$\exists z \in \mathbb{R} \text{ such that } \det(zA + B) \neq 0$$

(A, B) が singular とは $\det(zA + B) \equiv 0$

ところで, regular なる行列束 (A, B) に対して

次の定理より, $\operatorname{ind}(A, B) := \operatorname{ind}([cA + B]^{-1}A)$ で

index が定義できる

定理4 $\operatorname{ind}(A, B)$ は $c \in \mathbb{R}$ の選び方によらない

(proof) $c, \bar{c} \in \mathbb{R}$ with $c \neq \bar{c}$ and

$$\det(cA + B) \neq 0, \det(\bar{c}A + B) \neq 0 \text{ をとる.}$$

$$\text{このとき } G := (cA + B)^{-1}A, \bar{G} := (\bar{c}A + B)^{-1}A$$

とおいて, $\operatorname{ind}(G) = \operatorname{ind}(\bar{G})$ を示す.

$$(cA + B)^{-1}(\bar{c}A + B) =$$

$$= (cA + B)^{-1} \{ (cA + B) + (\bar{c} - c)A \}$$

$$= I + (\bar{c} - c)G \quad \text{より}$$

$$\{I + (\bar{c} - c)G\} \bar{G} = (cA + B)^{-1} (\bar{c}A + B) \bar{G}$$

$$= (cA + B)^{-1} A = G$$

$$\text{従って } \bar{G} = \{I + (\bar{c} - c)G\}^{-1} G$$

∴ $\{I + (\bar{c} - c)G\}^{-1}$, G は可換なる故

補題 3 より $\text{ind}(G) = \text{ind}(\bar{G})$ を得る Q.E.D.

定理 5 $(A, B) : \text{regular}$ とし

i) $Q : \text{non singular}$

$$\Rightarrow \text{ind}(QA, QB) = \text{ind}(AQ, BQ)$$

$$= \text{ind}(A, B)$$

ii) $AB = BA \Rightarrow \text{ind}(A, B) = \text{ind}(A)$

が成り立つ

定義 $U^{(k)} := (u_{ij}) \in L(\mathbb{R}^k)$, where

$$u_{ij} := \begin{cases} 0 & j \neq i+1 \\ 1 & j = i+1 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}_k := \{ U \mid U = \text{diag}(U_1^{(k_1)}, \dots, U_s^{(k_s)}), \max_{1 \leq i \leq s} \{k_i\} = k \}$$

と定義する

$$\text{例 } U^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, U^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理6 (A, B) : regular with index k and

$$\text{rank}([(cA+B)^+ A]^k) = r \quad \text{のとき}$$

$\exists P, Q \in L(\mathbb{R}^m)$: non singular with

$$A = P \text{diag}(I_r, U) Q, \quad B = P \text{diag}(W, I_{m-r}) Q$$

$$U \in \mathcal{N}_k$$

以上の準備をふまえたうえで、方程式(i)を考える。

(i)において

(i) (A, B) : singular のとき

$q \equiv 0$ としたときの斉次方程式は、 $x(t_0) = 0$ なる初期条件に対して、自明な解に限らない。

実際、 $1, 2, \dots, m+1$ に対して、

$$\det(kA+B) = 0 : 1 \leq k \leq m+1 \quad \text{より零でない}$$

$$U_k \in \mathbb{R}^m \text{ such that } (kA+B)U_k = 0 : 1 \leq k \leq m+1$$

をとれば、 U_1, \dots, U_m, U_{m+1} : 一次従属なる故

$$\alpha_i \in \mathbb{R} : 1 \leq i \leq m+1, (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1})^T \neq 0 \text{ and}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k U_k = 0 \quad \text{がとれる。このとき、}$$

$x(t) := \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k e^{k(t-t_0)} U_k$ は、恒等的に零とならない解になっている。

(ii) (A, B) : regular のとき

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ such that } \det(cA+B) \neq 0$$

このとき $k := \text{ind}(A, B)$,

$r := \text{rank}([(cA+B)^{-1}A]^k)$ とすると、定理 6 の結果より、

$\exists P, Q \in L(\mathbb{R}^m) : \text{non singular and}$

$$PAQ = \text{diag}(I_r, U), U \in \mathcal{N}_k$$

$$PBQ = \text{diag}(W, I_{m-r})$$

ここで変数変換 $y := Q^{-1}x$ と (1) の両辺に左から P を作用させることにより、(1) は、

$$\begin{pmatrix} I_r \\ U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W \\ I_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{但し } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} r \\ \} m-r \end{matrix}, \quad Pq = \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} r \\ \} m-r \end{matrix}$$

に同値変形される。ところで (2) の 2 番目の関係式

$$U y'_2 + y_2 = \tilde{q}_2 \quad \text{において、} U^k = 0 \text{ なる故}$$

y_2, \tilde{q}_2 : 適当に滑めらかであるとすれば、

$$y_2 = \tilde{q}_2 - U y'_2$$

$$= \tilde{q}_2 - U(\tilde{q}_2 - U y'_2)$$

$$= \tilde{q}_2 - U \tilde{q}_2 + U^2 y'_2$$

$$= \dots$$

$$= \tilde{q}_2 - U \tilde{q}_2 + \dots + (-1)^{k-1} U^{k-1} \tilde{q}_2^{(k-1)} + (-1)^k U^k y_2^{(k)}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell U^\ell \tilde{q}_2^{(\ell)}$$

となる。

従って (2) は

$$\begin{cases} y_1' = -W y_1 + \tilde{q}_1 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = \sum_{\ell=0}^{K-1} (-1)^\ell U^\ell \tilde{q}_2^{(\ell)} & (4) \end{cases}$$

なる正規形微分方程式 (3) と代数的制約式 (4) から成っている。

今回はこの正規形微分方程式と代数的制約式

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ z = g(t) \end{cases}$$

の近似解法について考察した。

上の方程式に対する近似式として、数値積分の安定性を求める上で、陰的 R-K 法が用いられるが、その中でも半陰的方法は、理論上、応用上重要な近似式である。ところが、one stage においては、オイラー近似になっている為、精度次数は高々 1 である。故に半陰的 R-K 法は、one stage では微分代数方程式には適さないことが分かる。この点の問題について、次の半陰的擬 R-K 法を用いると、どうなるかについて調べた。

半陰的擬 R-K 法のアルゴリズム

$$y_{n+1} = y_n + b_0(y_n - y_{n-1}) + h \sum_{j=1}^M b_j k_j$$

$$k_1 = f(t_{n-1}, y_{n-1}), \quad k_2 = f(t_n, y_n),$$

$$k_i = f(t_n + c_i h, y_n + a_{i0}(y_n - y_{n-1}) + h \sum_{j=1}^i a_{ij} k_j)$$

$$3 \leq i \leq M$$

$$z_{n+1} = z_n + b_0(z_n - z_{n-1}) + h \sum_{j=1}^M b_j l_j$$

$$z_n + a_{i0}(z_n - z_{n-1}) + h \sum_{j=1}^i a_{ij} l_j = g(t_n + c_i h)$$

$$1 \leq i \leq M$$

$$c_i = \sum_{j=1}^i a_{ij} + a_{i0}, \quad t_n = t_{n-1} + h$$

one stage ($M=3, b_j = a_{ij} = 0 : j=1, 2$) において

order 2 condition

for $y' = f(t, y)$

$$\begin{cases} h : b_0 + b_3 = 1 \\ h^2 : -b_0 + 2b_3 c_3 = 1 \end{cases}$$

for $z = g(t)$

$$\begin{cases} h : b_0 + b_3 = 1 \\ h^2 : -b_0 + b_3(-1 + (c_3^2 + c_3)/a_{33}) = 1 \end{cases}$$

stability condition

$$e_{n+1} - \{1 + b_0 - b_3(1 + a_{30})/a_{33}\} e_n + \{b_0 - b_3 a_{30}/a_{33}\} e_{n-1} = 0$$

$$|e_n| < +\infty$$

上の条件を満足するスキームとして

$$a_{30} = C_3^2 / (2C_3 + 1), \quad a_{33} = (C_3^2 + C_3) / (2C_3 + 1)$$

$$b_0 = (2C_3 - 1) / (2C_3 + 1), \quad b_3 = 2 / (2C_3 + 1)$$

$$C_3 \geq 1/\sqrt{2}$$

を得た。

上のスキームで、 $C_3 = 1$ として

$$\begin{cases} y' = (-1/2)y, & y(0) = 1 \\ z = \cos t \end{cases}$$

に適用すると、次の様な結果が得られた。

$$y_n - y(t_n)$$

t_n	$1/2^4$	$1/2^5$	$1/2^6$
1	-9.1470131E-05	-2.3792731E-05	-6.060631E-06
4	-8.8104139E-05	-2.2026139E-05	-5.507139E-06
8	-2.41317395E-05	-5.9970595E-05	-0.000001495
12	-4.91696475E-06	-1.21973775E-06	-3.0378075E-07

$$z_n - z(t_n) = 0$$

さらに two stage についても調べた。

$$M=4, \quad b_j = a_{ij} = 0 : j=1, 2, \quad a_{33}a_{44} \neq 0 \quad \text{として}$$

order 3 condition

for $y' = f(t, y)$

$$\begin{cases} h : b_0 + b_3 + b_4 = 1 \\ h^2 : -b_0 + 2b_3C_3 + 2b_4C_4 = 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hbar^3 D^2 f : b_0 + 3b_3 C_3^2 + 3b_4 C_4^2 = 1 \\ \hbar^3 f_y D f : b_0 + 3b_3 \{ (2a_{33} - 1) C_3 + a_{33} \} + \\ \quad + 3b_4 \{ 2a_{43} C_3 + (2a_{44} - 1) C_4 + a_{43} + a_{44} \} \\ \quad = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{but } D := \partial/\partial t + f \partial/\partial y$$

$$\text{for } z = g(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hbar : b_0 + b_3 + b_4 = 1 \\ \hbar^2 : -b_0 + b_3 \{ -1 + (C_3^2 + C_3)/a_{33} \} + \\ \quad + b_4 \{ -1 - a_{43}(C_3^2 + C_3)/a_{33}a_{44} + (C_4^2 + C_4)/a_{44} \} \\ \quad = 1 \\ \hbar^3 : b_0 + b_3 \{ 1 + (C_3^3 - C_3)/a_{33} \} + \\ \quad + b_4 \{ 1 - a_{43}(C_3^3 - C_3)/a_{33}a_{44} + (C_4^3 - C_4)/a_{44} \} \\ \quad = 1 \end{array} \right.$$

stability condition

$$\begin{aligned} e_{n+1} - [1 + b_0 + \{ -a_{44}(1 + a_{30})b_3 + (a_{43}(1 + a_{30}) - \\ - a_{33}(1 + a_{40}))b_4 \} / a_{33}a_{44}] e_n + \\ + [b_0 - \{ a_{30}a_{44}b_3 + (a_{33}a_{40} - a_{30}a_{43})b_4 \} / a_{33}a_{44}] e_{n-1} \\ = 0 \end{aligned}$$

$$|e_n| < +\infty$$

上の条件を満足するスキームとして

$$a_{30} = 1/15, a_{33} = 4/15,$$

$$a_{40}=0, a_{43}=3/4, a_{44}=1/4,$$

$$b_0=0, b_3=3/4, b_4=1/4,$$

$$c_3=1/3, c_4=1$$

を得た。

このスキームで前の方程式に適用すると、次の様な結果が得られた。

$$y_n - y(t_n)$$

$t \backslash h$	$1/2^3$	$1/2^4$	$1/2^5$
1	0.000001295	1.711E-07	2.29E-08
4	1.2792E-06	1.604E-07	0.0000000021
8	3.518E-07	4.374E-08	5.69E-09
12	7.1794E-08	8.902E-09	1.156E-09

$$z_n - z(t_n) = 0$$

参考文献

- [1] M. Nakashima: On pseudo-Runge-Kutta methods with 2 and 3 stages, publi. RIMS, Kyoto Univ, 18, 895-909.
- [2] L. Petzold: Order results for implicit Runge-Kutta methods applied to differential / algebraic systems, SIAM J. Numer. Anal. 4, 837-852.

[3] A . Prothero and A . Robinson , On the stability and accuracy of one-step methods for solving stiff systems of ordinary differential equations , Math . Comp , 28 (1974) , 145-162 .